Εισαγωγή

Ζητούμενο Το πρόβλημα μας ζητάει να βρούμε το μέγιστο κύκλο που περιέχεται πλήρως εντός κυρτού πολυγώνου.

Προαπαιτούμενα Σε ό,τι ακολουθεί, θα θεωρήσουμε ότι μπορούμε να βρούμε την απόσταση ενός σημείου από ένα ευθύγραμμο τμήμα σε σταθερό χρόνο, με χρήση μαθηματικών Β' Λυκείου. Επιπλέον θεωρείται δεδομένο ότι γνωρίζουμε τι είναι η Ternary Search.

Πηγές Στο τελευταίο κομμάτι θα δοθούνε πηγές για τα παραπάνω, αλλά και για ό,τι συζητηθεί. Ας σημειωθεί ότι αυτό το πρόβλημα έχει λύση γραμμικής πολυπλοκότητας, ακόμα και για μη-κυρτά πολύγωνα. Δε θα τη σκιαγραφήσουμε καθώς είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη, ακόμα και για τους δυσκολότερους διαγωνισμούς.

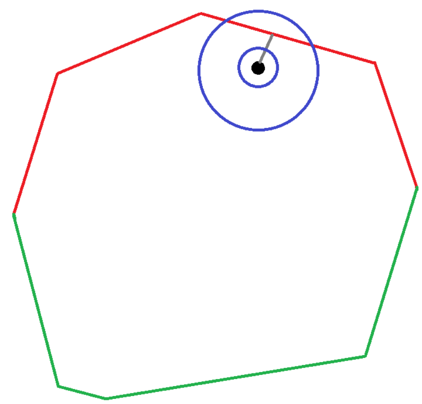


Figure 1: Γκρι η απόσταση του κέντρου από το πολύγωνο. Ο ένας κύκλος είναι μικρότερης ακτίνας από την γκρι απόσταση, κι ο άλλος μεγαλύτερης.

Μία $O(Nlog^2(MAX))$ Λύση

Ας ξεκινήσουμε απαντώντας κάποια απλούστερα ερωτήματα.

Αν γνωρίζουμε το κέντρο του κύκλου, πώς βρίσκουμε την ακτίνα του;

Βρίσκουμε την απόσταση του κέντρου από κάθε πλευρά, και η ελάχιστη απόσταση είναι η ακτίνα. Η αιτιολόγηση φαίνεται εύκολα στην 1. Αν η ακτίνα είναι μεγαλύτερη, τότε ο κύκλος βγαίνει εκτός πολυγώνου, ενώ αν είναι μικρότερη, τότε μπορούμε να "φουσκώσουμε" τον κύκλο χωρίς κίνδυνο να βγει εκτός πολυγώνου.

Μας απομένει να βρούμε το βέλτιστο κέντρο, αφού δοθέντος κέντρου μπορούμε να εντοπίσουμε τη σχετική ακτίνα. Για να απλοποιήσουμε τη δισδιάστατη αναζήτηση θα δούμε πρώτα πώς να κάνουμε αναζήτηση σε μία διάσταση.

Αν μας δοθεί κατακόρυφη ευθεία πάνω στην οποία εγγυημένα βρίσκεται το κέντρο του κύκλου, πώς το εντοπίζουμε;

Γρήγορη απάντηση: Με Ternary Search.

Επεξήγηση: Παρατηρούμε ότι ένα κυρτό πολύγωνο μπορεί, με φυσικό τρόπο, να χωριστεί σε άνω και κάτω τμήμα (3).

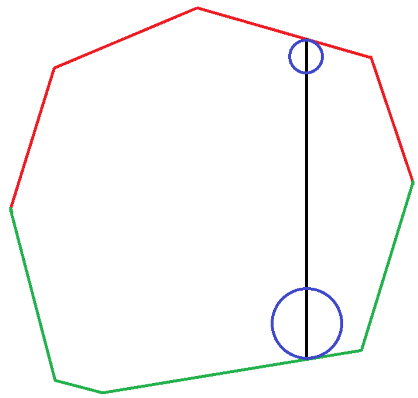
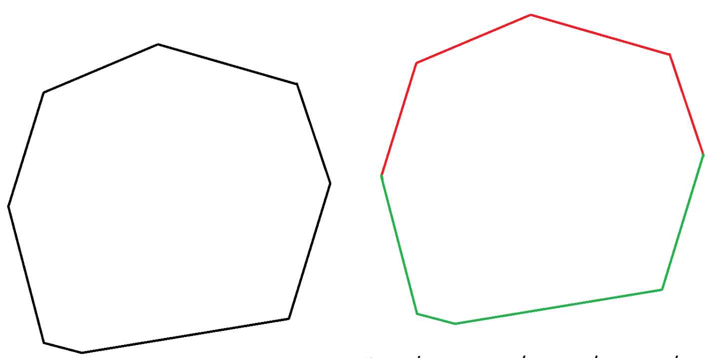


Figure 2: Δίνεται η μαύρη ευθεία, οι μπλε κύκλοι είναι δύο από τις (πολλές) υποψήφιες απαντήσεις με κέντρο στην ευθεία.



(a) Το αρχικό πολύγωνο

(b) Κόκκινο το άνω τμήμα, πράσινο το κάτω.

Figure 3: Διαχωρισμός κυρτού πολυγώνου σε άνω και κάτω τμήμα.

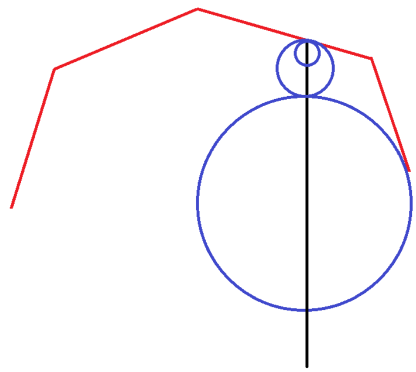


Figure 4: Όσο κατεβαίνουμε την ευθεία, η απόσταση από το άνω τμήμα μεγαλώνει.

Θα λέμε $d(P)$ την απόσταση ενός σημείου P από το πολύγωνο, $d_u(P)$ την απόσταση του P από το άνω τμήμα του πολυγώνου, και $d_l(P)$ την απόσταση του P από το κάτω τμήμα του πολυγώνου. Προφανώς ισχύει ότι:

$$d(P) = min\{d_u(P), d_l(P)\}$$

Όμως η $d_u(P)$ λειτουργεί με ένα πολύ σαφή τρόπο. Όσο πιο πολύ κατεβαίνουμε την ευθεία, τόσο μεγαλύτερη γίνεται (4). Παρομοίως η $d_l(P)$ μεγαλώνει όσο ανεβαίνουμε την ευθεία. Επομένως υπάρχει ένα σημείο p για το οποίο ισχύει $d(p) = d_u(p) = d_l(p)$. Για σημεία P άνω του p ισχύει

$$d(P) = d_u(P) < d(p)$$

και για σημεία κάτω του P ισχύει

$$d(P) = d_l(P) < d(p)$$

λόγω των μονοτονιών των d_u και d_l.

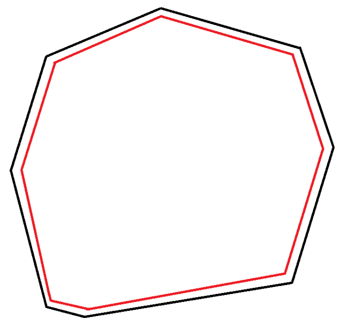
Η παραπάνω συζήτηση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κατεβαίνοντας την ευθεία η απόσταση αυξάνει, πιάνει ένα μέγιστο (στο σημείο p) και κατόπιν μειώνεται. Επομένως το p εντοπίζεται με μία Ternary Search.

Πλήρες πρόβλημα

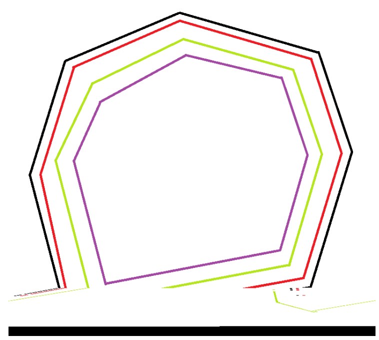
Για να βρούμε πλέον το κέντρο, αρκεί να βρούμε τη βέλτιστη κατακόρυφη ευθεία που το περιέχει, και μετά να χρησιμοποιήσουμε το πρόβλημα που προαναφέραμε. Παρατηρούμε ότι με την ίδια δικαιολόγηση με προηγουμένως, αν χωρίσουμε το πολύγωνο σε αριστερό και δεξί, η απόσταση του βέλτιστου σημείου των κατακόρυφων ευθειών αυξάνει όσο προχωράμε προς τα δεξιά, μέχρι που πιάνει ένα μέγιστο, κι από εκεί και πέρα ξαναμειώνεται. Επομένως μπορούμε με μία ακόμα Ternary Search (η οποία θα έχει εμφολευμένη την προαναφερθείσα Ternary Search) να βρούμε τη βέλτιστη κατακόρυφη ευθεία.

Αν MAX είναι το πλήθος των συντεταγμένων ενδιαφέροντος, η συνολική πολυπλοκότητα είναι $O(Nlog^2(MAX))$ (N λόγω της εύρεσης ακτίνας δοθέντος κέντρου, $log(MAX)$ λόγω της εύρεσης βέλτιστου κέντρου πάνω σε ευθεία, και $log(MAX)$ λόγω της εύρεσης της βέλτιστης κατακόρυφης ευθείας). Η λύση αυτή αρκεί για το 100% των βαθμών.

) X Q) D F W Αντί για την $O()$ μαθηματική λύση για εύρεση ελάχιστης απόστασης σημείου προς ευθύγραμμο τμήμα, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί μία... Ternary Search Αν κανείς το έγραφε έτσι θα είχε 3 εμφολευμένες Ternary Search.



(a) Το κόκκινο πολύγωνο είναι το πλήθος των σημείων που απέχουν 0.0001 του μαύρου πολυγώνου.



(b) Με μπλε σημειώνεται η ακμή του πράσινου πολυγώνου που πρόκειται να χαθεί. Πράγματι στο μωβ πολύγωνο δεν υπάρχει πια.

Figure 5: Διαχωρισμός κυρτού πολυγώνου σε άνω και κάτω τμήμα.

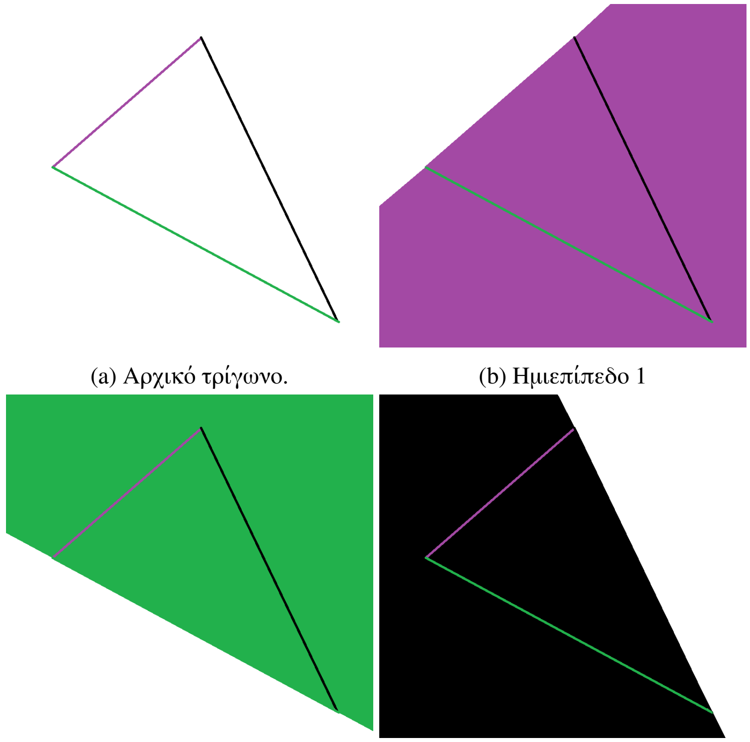
Μία $O(NlogN)$ Λύση

Πώς θα εντοπίσουμε όλα τα σημεία που απέχουν 0.0001 από το πολύγωνο; Απλούστατα πρόκειται για ένα δεύτερο πολύγωνο, ίδιας μορφής και ελαφρώς μικρότερο του αρχικού (5).

Με την ίδια λογική μπορούμε να βρούμε όλα τα σημεία που απέχουν R, όπου R αρκούντως μικρό. Όσο όμως το R μεγαλώνει (και το πολύγωνο συρρικνώνεται), κάποιες ακμές χάνονται (5). Για να βρούμε το μέγιστο R (που είναι η απάντησή μας) πρέπει να βρούμε τη μέγιστη συρρίκνωση, η οποία είναι προφανώς ένα σκέτο σημείο (εκφυλισμένο πολύγωνο).

Για να πετύχουμε την προσομοίωση της συρρίκνωσης, σημείωνουμε για κάθε ακμή την ακτίνα R στην οποία θα την πλακώσουν οι 2 γύρω της ακμές (απόσταση αφαίρεσης), με αποτέλεσμα να την εξαφανίσουν. Βάζουμε αυτές τις αποστάσεις σε ένα δυαδικό δέντρο, και τραβάμε την ελάχιστη, αφαιρώντας την από το δέντρο. Αφού αφαιρέσουμε αυτή την ακμή, ανανεώνουμε την απόσταση αφαίρεσης των γειτόνων της, καθώς πλέον οι γειτονιά τους έχει αλλάξει. Επαναλαμβάνουμε μέχρι να μείνουμε με ένα σημείο.

Ας σημειώσουμε ότι η εύρεση της απόστασης αφαίρεσης μπορεί να γίνει με μαθηματικά Β' Λυκείου (και πολλές πράξεις). Αρχικά βρίσκουμε τον τύπο ευθείας παράλληλης προς ευθεία και μετακινημένης κατά R, και κατόπιν εντοπίζουμε το R στο οποίο τα σημεία τομής με την αριστερή και τη δεξιά ακμή ταυτίζονται.



(a) Αρχικό τρίγωνο.

(b) Ημιεπίπεδο 1

(c) Ημιεπίπεδο 2

(d) Ημιεπίπεδο 3

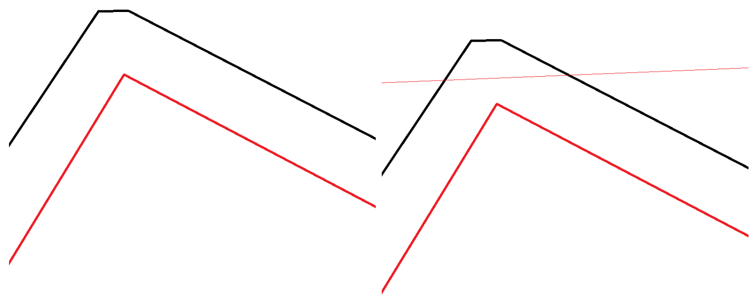
Figure 6: Η τομή των 3 ημιεπιπέδων (εικόνες 2-3-4) δίνει το τρίγωνο της εικόνας 1.

Μία $O(Nlog(MAX))$, θεωρητικά απλούστερη, λύση

Η λύση αυτή θεωρεί δεδομένο έναν γραμμικό αλγόριθμο εύρεσης τομής ημιεπιπέδων (προφανώς δε ζητείται από κανένα διαγωνιζόμενο, και αναφέρεται εδώ για λόγους γνωριμίας με το θέμα).

Ένα κυρτό πολύγωνο μπορεί να οριστεί ως η τομή των ημιεπιπέδων που ορίζονται από τις ακμές τους (είναι προφανές σε ποιο από τα δύο ημιεπίπεδα αναφερόμαστε). Κατανοητότερο θα γίνει αυτό αν παρατηρήσουμε την 6.

Η παρούσα λύση κάνει μία Binary Search για να βρει την μεγαλύτερη ακτίνα στην οποία ορίζεται ακόμα πολύγωνο (τομή ημιεπιπέδων). Αντιστοιχεί δηλαδή στην εύρεση του σημείου της προηγούμενης λύσης. Αυτό που απλουστεύει τα πράγματα είναι ότι δε χρειάζεται να ασχοληθούμε με τις ακμές που έχουν φύγει (7).



(a) Κόκκινο το εσωτερικό πολύγωνο, όπως τα έβλεπε η προηγούμενη λύση.

(b) Ελαφρύ κόκκινο το ημιεπίπεδο της άχρηστης πλευράς.

Figure 7: Το άχρηστο ημιεπίπεδο είναι απλώς περιττό, δεν προκαλεί προβλήματα.

Πράγματι, όταν μία ακμή έχει αφαιρεθεί (στην προηγούμενη λύση), παρατηρούμε ότι η τομή των δύο ημιεπιπέδων που την έχουν καταστήσει άχρηστη περιέχεται εξ ολοκλήρου στο ημιεπίπεδο αυτής. Άρα η τομή και των τριών ημιεπιπέδων είναι ίδια με την τομή των δύο (χρήσιμων) ημιεπιπέδων. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει πρόβλημα να βρούμε την ακμή όλων των ημιεπιπέδων, χωρίς να ασχοληθούμε με τις αφαιρέσεις.